ENIG

Année 2022-2023

GEA1/ GCV1/GM1 — Probabilités et Statistiques

**Série n° 1**

**Exercice 1.** Soit trois événements $A$, $B$ et $C$. Traduire à l'aide des opérations sur les ensembles les expressions pour les événements suivants :

1. A et C se réalisent mais pas B.
2. au moins l'un des trois événements se réalise.
3. les trois événements se réalisent.
4. aucun ne réalise.
5. au plus l'un des trois se réalise.
6. au plus deux des trois se réalisent.

**Exercice 2.**

1. Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?
2. Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.
3. On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques, 6 livres de physique, et 3 de chimie, (tous distincts). De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :
   a. Si les livres doivent être groupés par matières.
   b. Si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

**Exercice 3.** Soit $E$ l'ensemble à 12 éléments : $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. Dénombrer les parties de $E$ à 5 éléments qui contiennent :
   a. $a$ et $b$.
   b. $a$ mais pas $b$.
   c. $b$ mais pas $a$.
   d. ni $a$, ni $b$.
2. En déduire la relation : $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$.
3. Généraliser le résultat obtenu dans (2), par un dénombrement, pour tous $2 \leq p \leq n$.



Scanné avec CamScanner

**Exercice 4.** Une usine fabrique des pièces en grande série, en deux phases indépendantes. La première phase est susceptible de faire apparaître un défaut $X$ et la seconde un défaut $Y$. Une pièce peut présenter le défaut $X$ dans 2% des cas et le défaut $Y$ dans 8% des cas. Quelle est la probabilité qu'une même pièce tirée au hasard :

1. présente les deux défauts ?
2. présente au moins l'un des deux défauts ?
3. présente un et un seul des deux défauts ?
4. ne présente aucun des deux défauts ?

**Exercice 5.** Une machine industrielle comprend trois organes de fonctionnement. Si l'un d'entre eux présente une défaillance, la machine tombe en panne. Les défaillances possibles de ces organes sont indépendantes et les probabilités de défaillance sont respectivement 0,02, 0,05 et 0,10. Quelle est la probabilité que la machine tombe en panne ?

**Exercice 6.** On considère deux événements indépendants $A$ et $B$ de probabilités respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ calculer :

1. La probabilité que les deux événements aient lieu ;
2. La probabilité que l'un au moins des deux événements ait lieu ;
3. La probabilité qu'exactement l'un des deux événements ait lieu.

**Exercice 7.** L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet a traité parmi ces trois. Un candidat se présente en ayant préparé 60 sujets sur les 100. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :

1. aucun des trois sujets tirés.
2. un sujet sur les trois tirés ;
3. au moins deux sujets sur les trois tirés.



Scanné avec CamScanner

# Série 1

## Exo 2 :

① $T_1$ : 3 chaises
$T_2$ : 4 chaises
7 personnes
il y a 7! façon de permuter
ou il y a $C_7^3 \times 3! \times 4! = \frac{7!}{3!\,4!} \times 3! \times 4! = 7!$ façon

② a) MATHS
anagrammes : SHTAM....
il y a 5! anagrammes

b) RIRE : $\frac{4!}{2!}$ (si nbre de mot meme anagrammes = 4!)
nbre de répétitions : 2! ; nbre total de lettre

c) ANANAS :
il y a $\frac{6!}{2!\,3!}$

③ a) 4 M
6 P
3 C
il y a : $3! \times 4! \times 6! \times 3!$ façons
(nbre de permutation de matières ; $4!$ : M, $6!$ : P, $3!$ : C)

b) il y a :
$10 \times \underbrace{4!}_{M} \times \underbrace{9!}_{P+C}$

## Exo 3 :

a) il y a $C_{10}^3 = 120$ choix

b) il y a $C_{10}^4 = 210$ choix

c) $C_{10}^4$

d) $C_{10}^5 = 252$

Scanné avec CamScanner

② $C_{12}^5 = 792 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$

③ On a : $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$

Hq $C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$

on a : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

$C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

$\Rightarrow C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$

Ex 5 :

A = 'L'organe 1 tombe en panne'

B = 'L'organe 2 tombe en panne' A, B et C sont indépendants

C = 'L'organe 3 tombe en panne'

$p(A) = 0,02$

$p(B) = 0,05$

$p(C) = 0,1$

$p$ (la machine tombe en panne) on n'a pas la formule

~~$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B \cap C)$~~ $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

$= 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - p(\bar{A})p(\bar{B})p(\bar{C})$ (car A, B et C indépendants)

$= 0,1621$

Ex 6 :

$p(A) = \frac{1}{4}$ ; A, B indépendants

$p(B) = \frac{1}{3}$

① $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{12} = 0,083$

② $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2}$

③ $p((\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) - \overbrace{p(A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B)}^{\Phi}$

$= p(A)p(\bar{B}) + p(\bar{A})p(B) =$

Scanné avec CamScanner

## Exo 9 :

A : "l'ampoule est de type A"
B : "l'ampoule est de type B"
$H_1$ : "l'ampoule sortie vient de l'usine 1"
$H_2$ : "l'ampoule vient de l'usine 2"

$P(H_1) = 0,7$ | $P(B/H_1) = 0,8$
$P(H_2) = 0,3$ | $P(B/H_2) = 0,6$

1) $P(B) = P((B \cap H_1) \cup (B \cap H_2))$ $H_1$ et $H_2$ sont disjoints

$= P(B \cap H_1) + P(B \cap H_2)$

$P(B) = P(B/H_1) \cdot P(H_1) + P(B/H_2) \cdot P(H_2)$ [F de proba totales généralisés]

$= 0,8 \times 0,7 + 0,6 \times 0,3 = 0,74$

2) $P(H_1/B) = \dfrac{P(H_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B/H_1) \cdot P(H_1)}{P(B)}$ F de Bayes

$= \dfrac{0,8 \times 0,7}{0,74} = 0,75$

## Exo 10 :

A : "l'ingénieur est formé par l'école A" A et B sont incompatibles = disjoints
B : " " " B"
R : " est recruté"

$P(A) = \frac{1}{3}$
$P(R/A) = 0,2$
$P(R/B) = 0,3$

1) $P(R) = P(R/A)P(A) + P(R/B)P(B)$

$= 0,2 \times 0,33 + 0,3 \times 0,66 = 0,26$

2) $P(A/R) = \dfrac{P(A \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(R/A)\,P(A)}{P(R)} = 0,266$

3) $P(B/R) = \dfrac{P(B/R)}{P(R)} = \dfrac{P(R \cap B)\,P(B)}{P(R)} = 0,79$



Scanné avec CamScanner

Exc 12 :

A : 'on choisit le dé A' $\quad P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

B : 'on choisit le dé B'

R : 'obtenir face rouge lors de lancer'

1) $P(R) = P(R/A)P(A) + P(R/B)P(B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

2) $R_i$ : 'obtenir face rouge au $i^{ème}$ lancer' $i = 1, 2, 3$

$$P(R_3 / R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_3 \cap R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)}$$

on a $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1 \cap R_2 / A) \cdot P(A) + P(R_1 \cap R_2 / B) \cdot P(B)$

$= 0,28$

$P(R_3 \cap R_1 \cap R_2) = P(R_3 \cap R_1 \cap R_2 / A) P(A) + P(R_3 \cap R_1 \cap R_2 / B) P(B)$

$= 0,16 \Rightarrow P(R_3 / R_1 \cap R_2) = 0,57$

3) ~~$P(A/A_1 A \dots A R$~~

soit $n \geq 1$ ; $R_1 \dots R_n$ : 'obtenir face rouge au $i^{ème}$ lancer' $i = 1, \dots, n$

$$P(A / R_1 \cap \dots \cap R_n) = \frac{P(A \cap R_1 \cap \dots \cap R_n)}{P(R_1 \cap \dots \cap R_n)} = \frac{P(R_1 \cap \dots \cap R_n / A) P(A)}{P(R_1 \cap \dots \cap R_n)}$$

~~$P(A)$~~

$$= \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^n \frac{1}{2}}{\left(\frac{4}{6}\right)^n \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{6}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n}{\underbrace{2^n + 1}_{\in [0,1]}}, \quad n \geq 1$$

Scanné avec CamScanner

**Série n° 2**

**Exercice 1.** Soit $X$ une v.a. dont la loi est donnée par

$$P[X=-1]=0.2; P[X=0]=0.1; P[X=4]=0.3; P[X=5]=0.4.$$

Calculer $[X \leq 3]$, $P[X>2]$, l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 2.** Les étudiants d'un cours de probabilités sont répartis en trois groupes pour les séances d'exercices, comprenant respectivement 25, 30 et 35 étudiants. On choisit au hasard un étudiant du cours et on note $X$ le nombre d'étudiants de son groupe. Calculer la loi et l'espérance de $X$. Cette espérance est-elle égale à la moyenne du nombre d'étudiants par groupe.

**Exercice 3.** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<-2 \\ 1/4, & -2\leq x<0 \\ 1/2, & 0\leq x<3 \\ 2/3, & 3\leq x<4 \\ 1, & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de $F_X$.
2. Soit $X$ une variable aléatoire ayant $F_X$ pour fonction de répartition. Calculer alors $P(X\leq 1])$, $P(X<1)$ et $P(2<X\leq 0])$.
3. Déterminer aussi la loi de $X$, son espérance et sa variance.
4. Soit $Y$ et $Z$ les variables aléatoires définies par $Y=\dfrac{X}{2}$ et $Z=X+2$. Déterminer les fonctions de répartition de $Y$ et de $Z$ et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que $F_X$.

**Exercice 4.** Dans une chaîne de production de paquets de bonbons, une machine dépose dans un paquet un nombre aléatoire $25+X$ de bonbons où $X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans -2, -1, 0, 1, 2 de loi de probabilité :

| X=k | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | p | 2p | 1/4 | 1/4-p | 1/2-2p |

où $p$ est un nombre réel positif.



Scanné avec CamScanner

1. Pour quelle(s) valeur(s) de p la distribution donnée est-elle une loi de probabilité ?
2. Quel est le nombre moyen de bonbons déposés par la machine (que l'on exprimera en fonction de p) ?
3. On suppose dans cette question que $p = 1/8$. L'entreprise décide de retirer de la vente tous les paquets de bonbons contenant 23 ou 24 bonbons. On suppose que la machine produit 50 paquets de bonbons (de manière indépendante) et on note Y le nombre de paquets de bonbons produits pouvant être vendus.
   a. Déterminer la loi de probabilité de $Y$. Que valent $E(Y)$ et $V(Y)$ ?
   b. Quelle est la probabilité
      i. que les 50 paquets de bonbons puissent être vendus ?
      ii. qu'aucun des 50 paquets de bonbons ne puisse être vendu ?
      iii. qu'au moins 48 des 50 paquets de bonbons puissent être vendus ?

**Exercice 5.** Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'une équipe arrive en retard à la suite d'un appel est $p = \frac{1}{4}$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit $X$ le nombre de retards que ce client a subi.
   a. Reconnaître la loi de probabilité de $X$.
   b. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents, 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit $M$ le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.
   a. Quelle est la loi de $M$ ? L'expliciter sous forme de tableau.
   b. Calculer $E(M)$.



Scanné avec CamScanner

**Série n° 2**

**Exercice 1.** Soit $X$ une v.a. dont la loi est donnée par

$$P[X = -1] = 0.2; P[X = 0] = 0.1; P[X = 4] = 0.3; P[X = 5] = 0.4.$$

Calculer $P[X \leq 3]$, $P[X > 2]$, l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 2.** Les étudiants d'un cours de probabilités sont répartis en trois groupes pour les séances d'exercices, comprenant respectivement 25, 30 et 35 étudiants. On choisit au hasard un étudiant du cours et on note $X$ le nombre d'étudiants de son groupe. Calculer la loi et l'espérance de $X$. Cette espérance est-elle égale à la moyenne du nombre d'étudiants par groupe.

**Exercice 3.** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2 \\ 1/4, & -2 \leq x < 0 \\ 1/2, & 0 \leq x < 3 \\ 2/3, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de $F_X$.
2. Soit $X$ une variable aléatoire ayant $F_X$ pour fonction de répartition. Calculer alors $P(X \leq 1)$, $P(X < 1)$ et $P(-2 < X \leq 0)$.
3. Déterminer aussi la loi de $X$, son espérance et sa variance.
4. Soit $Y$ et $Z$ les variables aléatoires définies par $Y = \dfrac{X}{2}$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de $Y$ et de $Z$ et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que $F_X$.

**Exercice 4.** Soit $X$ la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 4e^{-4x}$.

1. Calculer $F(5)$.
2. Calculer $P1(< X < 3)$.

**Exercice 5.** Déterminez une fonction de densité correspondant à chacune des fonctions de répartition suivantes.



Scanné avec CamScanner

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

2. $F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**Exercice 6.** On considère une variable aléatoire $X$ de densité

$$f(t) = \frac{c}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de $c$ la fonction $f$ est-elle bien une densité ?
2. Calculer la fonction de répartition de $X$.
3. Déterminer $P(X < 0)$ et $P(-1 < X < 1)$.

**Exercice 7.** Soit $X$ une variable aléatoire continue de densité $f$ , donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité.
2. Calculer les probabilités $P(X = 3)$, $P(\frac{1}{2} < X \leq 2)$ et $P(X \geq a)$ pour $a \geq 1$.
3. Calculer l'espérance de $X$.
4. $X$ possède-t-elle un moment d'ordre 2 ?
5. Soit $Y = \ln(X)$ où on définit $\ln(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Calculer $P(Y \leq y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. En déduire la loi de $Y$.



Scanné avec CamScanner

**Exercice 8.** À l'ENIG, parmi les étudiants 40% suivent l'option $A_1$, 30% suivent l'option $A_2$ et 30% suivent l'option $A_3$. Chaque étudiant suive une seule option. La proportion d'étudiants qui n'ont pas la moyenne dans l'option $A_1$ est de 10%, dans l'option $A_2$ de 5% et dans l'option $A_3$ de 5%. On choisit un étudiant au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il n'ait pas la moyenne.
2. Sachant qu'il n'a pas la moyenne, calculer la probabilité a posteriori qu'il ait suivi l'option $A_1$, $A_2$ ou $A_3$.

**Exercice 9.** On considère un stock d'ampoules électriques. 70% viennent de l'usine 1 et 30% de l'usine 2. Il y a deux types d'ampoules : type $A$ et type $B$. L'usine 1 produit 80% d'ampoules de type $B$ et l'usine 2 en produit 60%. On prélève au hasard une ampoule dans le stock.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit de type $B$ ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle sorte de l'usine 1 sachant qu'elle est de type $B$ ?

**Exercice 10.** Deux écoles distinctes $A$ et $B$ forment des ingénieurs en informatique. L'école $A$ forme $1/3$ des ingénieurs de ces deux écoles. Une entreprise recrute ses ingénieurs informaticiens de ces deux écoles. A l'issue du recrutement on constate que 20% des ingénieurs de l'école $A$ et 30% des ingénieurs de l'école $B$ ont été recrutés par cette entreprise. On notera $A$, $B$, $R$ les événements respectifs "l'ingénieur vient de l'école $A$", "l'ingénieur vient de l'école $B$" et "l'ingénieur est recruté".

1. Calculer P(R), la probabilité pour qu'un ingénieur (pris au hasard parmi tous les ingénieurs formés par ces deux écoles) soit recruté.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un ingénieur pris au hasard provienne de l'école $A$ sachant qu'il a été recruté.
3. Quelle est la probabilité pour qu'un ingénieur pris au hasard provienne de l'école $B$ sachant qu'il a été recruté.

**Exercice 11.** Le test de dépistage d'un certain virus n'est pas infaillible :
— 1 fois sur 100, il est positif, alors que l'individu n'est pas contaminé,
— 2 fois sur 100, il est négatif alors que l'individu est contaminé.
D'autre part, on sait que sur la population totale, la fraction de porteurs est approximativement de $1/1000$.

1. Étant donné que le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu ne soit pas porteur du virus ?
2. Étant donné que son test est négatif, quelle est la probabilité qu'un individu soit porteur du virus ?



Scanné avec CamScanner

**Exercice 12.** On dispose de deux dés $A$ et $B$. Le dé $A$ possède quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé $B$ a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie équilibrée. Si l'on obtient « pile », on décide de jouer uniquement avec le dé A, et si on obtient « face » on décide de jouer uniquement avec le dé $B$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir rouge à un lancer quelconque d'un dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième lancer, sachant que l'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers lancers.
3. Déterminer la probabilité $p_n$ d'avoir utilisé le dé $A$, sachant que l'on a obtenu rouge aux n premiers lancers ($n \geq 1$).



Scanné avec CamScanner

# Correction de TD n°2

**Exo 1 :**

$P(X=-1) = 0,2$

$P(X=0) = 0,1$

$P(X=4) = 0,3$

$P(X=5) = 0,4$

$P(X \leq 3) = P(X=-1) + P(X=0) = 0,3$

$P(X>2) = P(X=4) + P(X=5) = 0,7$

$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X=x_i) = -1 \times P(X=-1) + 4 \times P(X=4) + 5 \times P(X=5)$

$= 3$

$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$E(x^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X=x_i) = 15$

$V(x) = 15 - 9 = 6$

$\sigma(x) = \sqrt{6}$

**Exo 2 :**

$X$ : "le nbre des étudiants du groupe"

$\Omega_X = \{25; 30; 35\}$

| $X=x_i$ | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{18}$ |

$P(X=25) = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

$P(X=30) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

$P(X=35) = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$

$E(X) = 30,555$

$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$E(X^2) = 950$

$V(X) = 950 - 30,555 = 16,39$

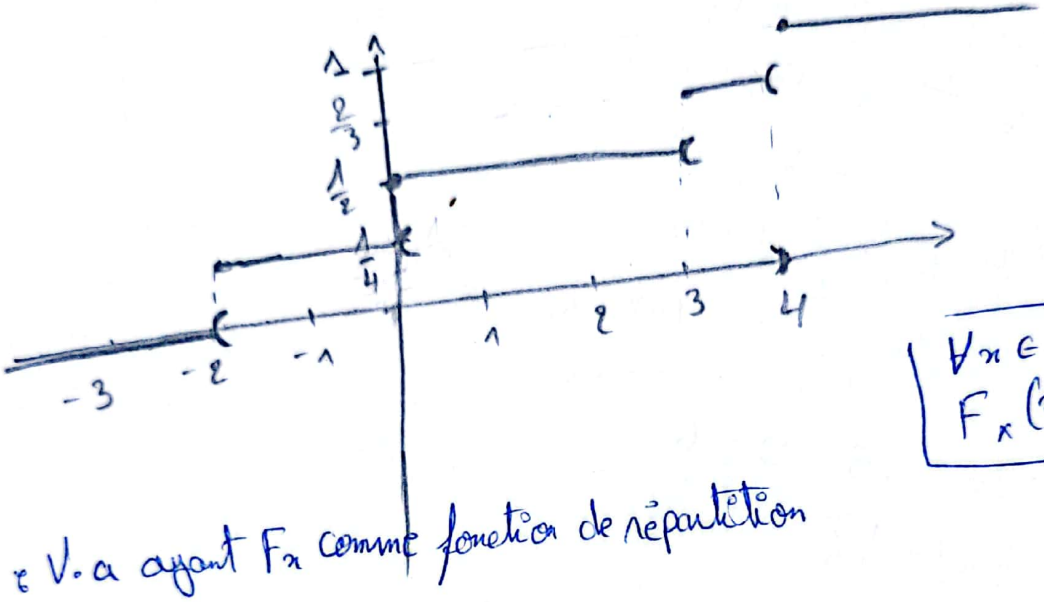
La moyenne de nbre d'étudiants $= 30 = \frac{90}{3} \neq 30,555 = E(X)$



Scanné avec CamScanner

Exo 3 :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

① 


$\forall x \in \mathbb{R}$ : $F_X(x) = P(X \leq x)$

② $X$ : V.a ayant $F_X$ comme fonction de répartition

$P(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1}{2}$

$P(X < 1) = P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{1}{2}$

$P(-2 \leq X \leq 0) = F_X(0) - F_X(-2)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X > 1) = 1 - F_X(1)$

$P(X \geq 1) = P(X > 1) + P(X = 1)$

③ $S_X = \{-2; 0; 3; 4\}$

$P(X = k) =$ l'hauteur $(X = k)$

| $X = x_i$ | $-2$ | $0$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ | $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ |

Scanné avec CamScanner

# chap I proba

- $0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$
- $p(\Omega) = 1$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- si A et B sont incompatibles, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- $p(\emptyset) = 0$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p\left(\bigcup_{i \in I N} A_i\right) = \sum_{i \in I N} p(A_i)$
- Les événements $(A_i)_{i \in I N}$ sont dit incompatibles, si pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

- $p(\omega) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
- $|A|$ : le cardinal de A $\Rightarrow$ le nbre d'éléments que contient A.



Scanné avec CamScanner

- $|A \cup B| = |A| + |B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Si A est un ensemble fini de cardinal n. Le nbre de suites de longueur k constituées d'éléments de A est $n^k$ (tirage avec remise)
- il y a $n!$ permutations d'un ensemble de cardinal n. (ordonner, arranger)
- $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (arrangement sans répétition de k objets pris parmi n. (tirage sans remise)
- $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (combinaisons sans répétition, sans tenir compte de l'ordre) (tirage exhaustif)
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
- $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p y^{n-p}$
- soit n objets, avec $n_1$ sont indistinguables, $n_2$ // ... $n_k$ Le nbre de permutations différentes est $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Scanné avec CamScanner

- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ∝
- $P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = P(A/B)P(B)$ ∝
- $P(\Omega/B) = 1$ $\quad P(\emptyset/B) = 0$
- $P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C/B)$
- $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$
- $A \subset C \Rightarrow P(A/B) \leq P(C/B)$
- $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A/B_j) P(B_j)$ ∝
- Formule de Bayes :

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i) P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/E_i) P(E_i)}$$

- événements indépendants :

$$P(A/B) = P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

- Si A et B sont 2 événements incompatibles, alors ils sont dépendants.
- Si A et B indépendants $\Rightarrow$ il y a indépendance entre A et $\bar{B}$, entre $\bar{A}$ et B et entre $\bar{A}$ et $\bar{B}$

Scanné avec CamScanner

- 3 événements indépendants 2 à 2 &

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

- $P\left(\bigcap_{i \in IN} A_i\right) = \prod_{i \in IN} P(A_i)$
- incompatible & $P(A \cap B) = 0$
- = disjoint
- anagrammes : $\frac{\text{nbre de lettre !}}{\text{nbre de repetition !}}$
- si nbre de mot avec les caractères & nbre de lettre !

⚠
- on n'a pas $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C)$

Scanné avec CamScanner

# chap 3 Proba

## Prob discrètes :

- $f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ — loi uniforme discrète

on dit que $\{X = 1\}, \dots \{X = n\}$ sont equiprobables

- $E[X] = \frac{n+1}{2}$
- $Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$
- La fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{n} & \text{si } 1 \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

- La fonction generatrices des moments de X est définies pour tout $t > 0$ par

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{e^t}{n} \frac{1 - e^{nt}}{1 - e^t}$$

- $M_X(t)$ est non définie en $t = 0$
- La somme de 2 v.a discrètes uniformes indép n'est pas une v.a uniforme, on dit donc que la loi uniforme n'est pas stable par l'addition



Scanné avec CamScanner

## Loi de Bernoulli :

- On s'intéresse à la réalisation ou non d'un événement.
- La loi donnée par :

$$P[Y=1] = p, \quad P[Y=0] = 1-p$$

on dit que la v. a discrète $Y$ est distribuée selon la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.

$$Y \longrightarrow \mathcal{B}(p)$$

- $E[Y] = p$
- $Var(Y) = p(1-p)$
- $M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{y=0}^{1} e^{yt} P(Y=y) = (1-p) + pe^t$
- $M_Y$ est continue et dérivable au pt $t=0$

$$\Rightarrow m_k = \frac{d^k M_Y(t)}{dt^k}\Big|_{t=0} = p \quad k \in \mathbb{N}^*$$

- Toute V. a discrète ayant une fonction génératrice de moment de la forme $1-\alpha+\alpha e^t$ est dite distribuée selon une loi de Bernoulli de paramètre $\alpha$
- La somme $Z = X + Y$ n'est pas distribuée selon une loi de Bernoulli.

Scanné avec CamScanner

## Loi binomiale :

- $p$ représente le nbre de succès obtenus lors des $n$ épreuves d'un schéma de Bernoulli
- on dit que suit une loi binomiale de paramètres $(n,p)$, $0 \leq p \leq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ noté $\mathcal{B}(n,p)$
- cette loi est donné par :

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = \{0..n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$
- La loi binomiale est utilisée pour le contrôle de qualité de produit.
- Le nombre de succès : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\Rightarrow$ une V.a de loi $\mathcal{B}(n,p)$ est une somme de $n$ V.a indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$

- $E(X_i) = p \Rightarrow E(X) = np$ $\quad V(X_i) = p(1-p) \Rightarrow V(X) = np(1-p)$
- $M_{X_i}(t) = 1 - p + pe^t$, $i = 1 \dots n$

$\Rightarrow M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$

- $U = Z + W$ est distribuée selon une loi binomiale de paramètres $(n_1+n_2, p)$ $\Rightarrow$ La loi binomiale est stable par addition

Scanné avec CamScanner

- **Loi de poisson :**
  - décrit le nombre d'apparition pendant une unité de temps d'un évènement dont la réalisation ne dépend pas du nombre des réalisations passées et n'influent pas sur les futures
  - on dit que X est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ si l'ensemble de valeurs possibles est $\mathbb{N}$
  - $f(x) = P(X=x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
  - décrire le comportement d'évenement dont les chances de réalisation sont faibles
  - $E(X) = \lambda$ $\quad$ $V(X) = \lambda$
  - $X_1 \to P(\lambda_1)$ et $X_2 \to P(\lambda_2)$, si $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes $\Rightarrow X = X_1 + X_2 \to P(\lambda_1 + \lambda_2)$
  - La loi de Poisson se présente comme le cas limite d'une loi binomiale. (si p est petit et n assez grand) de paramètre $\lambda = np$ (si $n > 20$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 5$)



Scanné avec CamScanner

- Loi de Bernoulli : (oui ou non)

$X \sim B(p)$ ← proba de succès

$D_X = \{0, 1\}$

$P(X = k) = p^k q^{1-k}$ ← $q = 1 - p$

$E(X) = p \qquad V(X) = pq$

- Loi binomiale : (loi de Bernoulli n fois)

$X \sim B(n, p)$ ← nbre de répétition ; ← proba de succès

$D_X = \{0, \dots, n\}$

$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ← $q = 1 - p$

$E(X) = np \qquad V(X) = npq$

- Loi de Poisson :

$X \sim P(\lambda)$ ← nombre moyen d'occurences dans un intervalle de temps fixé

$D_X = \mathbb{N}$

$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$E(X) = V(X) = \lambda$



Scanné avec CamScanner

- L'approximation :
  - $B(n,p) \approx P(\lambda)$ $\left(\begin{array}{l} n \geq 50 \\ p \leq 10\% \end{array}\right)$

    $\lambda = np$
- la selection de n nombre de personnes

  $\Rightarrow$ loi binomiale
- Loi uniforme :

  X suit la loi uniforme si ~~pour tout~~ $p(X=\lambda) = \dots$

  $\dots = p(X=n.)$
- Parmi $\Rightarrow$ binomiale
- fonction de densité de la loi de poisson :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- fonction de repartition :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

1)

Scanné avec CamScanner

- Loi normale :

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Pour calculer la proba d'une variable normale, il est nécessaire de faire un changement de variable, c'est à dire passer de la loi normale $N(\mu, \sigma)$ vers la loi normale centré et réduite et de chercher la proba dans la table de la LNCR $N(0,1)$

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- $P(Z \leq a) = \Pi(a)$
- $P(Z \geq a) = 1 - \Pi(a)$
- $P(Z \leq -a) = 1 - \Pi(a)$
- $P(Z \geq -a) = \Pi(a)$
- $P(a \leq Z \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a) = 2\Phi(a) - 1$

- Les actions sont normalement distribué $\Rightarrow$ loi normale
- écart type $= \sigma$
- L'action moyen $= E(X) = \mu$



Scanné avec CamScanner

- Pour calculer la proba ds les lois discrètes

$\Rightarrow P(X \leq n) = p(X=1) + \dots + p(X=n)$

$p(2 \leq X \leq 4) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$

- Pour calculer la valeur de x la plus probable dans la loi binomiale, on doit calculer
  * $p(X=1), p(X=2) \dots p(X=n)$ et on choisit la valeur la plus grande.

- $\int u'e^u \rightsquigarrow e^u$ (primitive) ⚠

- $E(\Sigma R) = \Sigma E(R)$
- $V(\Sigma R) = \Sigma V(R)$

Scanné avec CamScanner

- loi Gamma :

  - $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$
  - $\Gamma(1) = 1$
  - $\Gamma(p) = (p-1)! = (p-1)\Gamma(p-1)$
  - $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
  - densité : $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\theta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - $M_x(t) = \frac{\theta^p}{(\theta - t)^p}, \quad t < \theta$
  - $m_k(x) = \frac{\Gamma(k+p)}{\theta^k \Gamma(p)}$
  - $E(x) = \frac{p}{\theta}$
  - $V(x) = \frac{p}{\theta^2}$
  - $\gamma(1, \theta) \approx$ loi exponentielle de paramètre $\theta$
  - X et Y sont v.a ind tel que $X \to \gamma(p_1, \theta)$ et $Y \to \gamma(p_2, \theta)$
    $\Rightarrow X + Y \longrightarrow \gamma(p_1 + p_2, \theta) \Rightarrow \gamma$ est stable par l'addition
  - La loi $\gamma$ est stable par la multiplication par un scalaire $> 0$ : $X \to \gamma(p, \theta) \Rightarrow aX \longrightarrow \gamma\left(p, \frac{\theta}{a}\right)$

Scanné avec CamScanner

## • Loi normale : Loi gaussienne / Laplace Gauss

+ définie par la moyenne $\mu$ et la variance $\sigma^2$
+ densité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ , $x \in \mathbb{R}, \sigma$
on note $X \longrightarrow N(\mu, \sigma^2)$ ou $X \longrightarrow N(\mu, \sigma$
+ $M_X(t) = e^{t\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ , $t \in \mathbb{R}$
+ $E(X) = \mu$ + $V(X) = \sigma^2$
+ Le graphe de la courbe Normale est symétrique par rapport à la droite d'abscisse $\mu$ (la moyenne)
+ on peut tjrs ramener une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ à une loi dite normale centrée réduite de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$
+ La loi normale est stable par addition
$X + Y \longrightarrow N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
+ La transformation linéaire d'une loi normale est une variable normale. Soit $Y = aX + b$ avec $X \to N(\mu, \sigma^2)$
alors $Y \Rightarrow N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Scanné avec CamScanner

# Prob continues :

- **Loi uniforme continue :**

* on dit que X est distribuée selon une loi uniforme continue sur $[a,b]$, si sa fonction de densité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* $M_x(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$

* $E(X) = \frac{b+a}{2}$ * $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

* La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

* La somme de 2 v.a distribuées selon une loi uniforme n'est pas une V.a uniforme => cette loi n'est pas stable par addition.



Scanné avec CamScanner

## • Loi exponentielle ε

+ densité de proba : $f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\beta > 0$

+ X ne prend que des valeurs positives
+ cette loi est utilisée dans le contrôle de la qualité, la régularité et toutes les applications qui se basent sur le facteur du temps.
+ fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

+ $M_x(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$ , $t < 0$
+ $E(x) = \frac{1}{\beta}$ + $V(x) = \frac{1}{\beta^2}$
+ Pour tous $s, t > 0$

$$P[X > t+s / X > t] = P[X > s]$$

+ $p(X \geq n) = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$
+ $p(X \leq n) = \int_{-\infty}^{n} f(x)\,dx$

excède =>

Scanné avec CamScanner

## • loi normale centrée réduite :

+ $X \to N(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est dite variable aléatoire Normale centrée réduite.
+ elle est de moyenne 0 et de variance 1
+ densité : $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$, $z \in \mathbb{R}$
+ le centre de symétrie de la courbe de la fonction de répartition devient le pt $(0, \frac{1}{2})$
+ fonction de répartition :

$$\Phi(z) = P(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, z \in \mathbb{R}$$

+ pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
+ $P(-a \leq z \leq a) = 2\Phi(a) - 1$ (intervalle centré sur la valeur moyenne de la Taille) ⚠

## • Th central limite :

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes ayant resp comme moyenne $E(X_i) = \mu_i$ et comme variance $V(X_i) = \sigma_i^2$ et soit la comb linéaire $Y = X_1 + \dots + X_n$ alors la variable aléatoire $Z = \frac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)}$ tendvers la loi normale centrée réduite lorsque $n \to \infty$



Scanné avec CamScanner

• soit $X \to B(n,p)$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale. X la somme de variables de Bernoulli indep de parametre p. Si n est grand alors X suit approximativement une loi Normale

$N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

( $np > 5$ lorsque $p \leq 0,5$ )
( $n(1-p) > 5$ lorsque $p > 0,5$ )

Puisque $X \to B(n,p)$ est discrète, on cherche à calculer des prob comme $P(X = x)$



Scanné avec CamScanner

# statistique

- statistique descriptive = statistique exploratoire = analyse des données : la description des données étudiées.
- statistique inférentielle : ce terme regroupe les méthodes dont l'objectif principal est de préciser un phénomène sur une population globale.
- fréquence : $f_i = \frac{n_i}{n} \times 100$
- effectifs cumulés : $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$
- fréquences cumulées : $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$
- nombre total d'observations : (effectifs)

$$n = \sum_{i=1}^{M} n_i$$

- Moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \sum_{i=1}^{M} f_i x_i$$

↳ indicateur le plus naturel de tendance centrale unique pour caractériser le centre d'une série d'observations.



Scanné avec CamScanner

- écart-type :

$$\text{Var}(x) = S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{M} n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{M} n_i (x_i)^2\right] - (\bar{x})^2$$

- indicateur de dispersion :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{M} n_i (x_i - \bar{x})$$

- bornes de la $i^{ème}$ classe : $(b_{i-1}, b_i)$
- centre : $\frac{b_{i-1} + b_i}{2} = x_i$
- Amplitude : $a_i = b_i - b_{i-1}$
- Revenu annuel : V quantitative continue
- Lieu de résidance : V qualitative
- citoyenneté : V qualitative
- Âge : V quantitative discrete
- Nombre de ..... : quantitative discrete
- longueur : //
- Tableau statistique :

$x_i$ ; $n_i$ ; $N_i$ ; $f_i$ (%) ; $F_i$ (%)

- classe modale : la classe dominante (ayant le plus grand effectif)
- mode : variable qui a le plus grand effectif

Scanné avec CamScanner

- étendue : e = dser valeur - awad valeur
- si l'effectif Total N est pair, la médiane est la moyenne des $\frac{N}{2}^{ème}$ et $\left(\frac{N}{2}+1\right)^{ème}$ valeur
- Si l'effectif Total N est impair, la médiane est la $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{ème}$ valeur

- Quartiles :
  - Le premier quartile est la valeur de rang n ou n est le premier entier sup ou égal à $\frac{N}{4}$
  - le troisième quartile est la valeur de rang n ou n est le premier entier sup ou égal à $\frac{3N}{4}$

- médiane (graphique) (continue)
  $M_x = D : (y = 50\%) \cap (\mathcal{E}$ f cummulée$)$
- quartiles (graphique)
  $Q_1 = D : (y = 25\%) \cap (\mathcal{E}$ f cummulé$)$
  $Q_3 = D : (y = 75\%) \cap (\mathcal{E}$ f cummulé$)$

Scanné avec CamScanner

• distribution de fréquences => diagramme de Bétons

Scanné avec CamScanner